

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНА-
НИЯ И ТЕХНИКИ

История

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СЕКТОР ИСТОРИИ ТЕХНИКИ И ЕСТЕ-
СТВОЗНАНИЯ ИНСТИТУТА ИСТОРИИ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ:

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), И. Г. Башмакова, Н. Н. Боголюбов, А. О. Гельфонд, Б. Н. Делене, Н. П. Еругин, А. Ю. Ишлинский, И. П. Кубилос, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, С. Н. Мергелян, Ю. А. Митропольский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, И. Б. Погребысский, Е. Я. Ремез, Б. А. Розенфельд, К. А. Рыбников, В. И. Смирнов, Ю. Д. Соколов, Г. С. Чогошвили, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

РЕДАКЦИЯ 1-го ТОМА:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), Ю. А. Митропольский, И. Б. Погребысский, Е. Я. Ремез, К. А. Рыбников, Ю. Д. Соколов, В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

1

**С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН
ДО КОНЦА XVIII В.**

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В СРЕДНЕЙ АЗИИ

1

Истоки науки и культуры Средней Азии

Древние культуры в Средней Азии зародились у народов, живших на территории, расположенной между верхними течениями Сыр-Дарьи и Аму-Дарьи к югу от Аральского моря. В Средней Азии перекрещивались мировые торговые и военные пути. Здесь непрерывно шли караваны купцов, связывавшие Средиземное море с Китаем и Индией. Здесь же проходили и орды завоевателей, сметавшие древние и новые культуры. Поэтому культуры среднеазиатских народов возникли и развились позже средиземноморских цивилизаций. Народам Средней Азии столько раз приходилось восстанавливать разрушенные города и поселения, столько раз начинать все заново, что значительная часть их сил уходила на заживление ран, нанесенных различными завоевателями. И при всем этом они создали такие научные и художественные ценности мирового значения, внесли такой вклад в мировую науку и культуру, что ими по праву могут гордиться все народы нашей страны.

Как показали археологические раскопки и исследования, проведенные советскими учеными в 30—60-х годах XX в., в первой половине I в. до н. э. на этой территории происходило расселение ираноязычных племен, находившихся на стадии перехода к оседлому образу жизни. Со временем они сформировались в племенные объединения, главными из которых были хорезмийцы в районе Аральского моря, согдийцы в области среднего течения Аму-Дарьи и Сыр-Дарьи, бактрийцы у верховьев Аму-Дарьи. В нижнем течении Сыр-Дарьи и к северу от нее кочевали ираноязычные скифские и тюркоязычные племена, находившиеся на стадии родового строя. Ираноязычные и тюркоязычные племена и были автохтонами Средней Азии. Им принадлежит та блестящая культура, которая расцвела здесь в IX—XV вв. Она передавалась из рода в род, от поколения к поколению и выстояла под ударами завоевателей, которые пытались ее уничтожить. Не исчезли и творившие ее племена. Древние поселенцы Согдианы, Хорезма, Бактрии, Ферганы, Шаша являются предками таджиков, узбеков, туркмен и других народов Средней Азии. Таким образом, средневековая культура среднеазиатских народов — составная часть культуры Средней Азии.

Уровень математических знаний среднеазиатских народов до арабского завоевания не установлен, так как арабы полностью уничтожили всю древнюю письменность. Однако на основании косвенных данных можно предполагать, что он был не ниже, чем у вавилонян, китайцев, индийцев, египтян, народов Малой Азии. Действительно, еще в начале нашей эры города Мавераннахра вели оживленную торговлю с Китаем, Индией, Грецией, причем не только продуктами сельского хозяйства, но и металлами (железом, серебром), а также предметами художественного производства.

Пока трудно определить культурные связи между среднеазиатскими государственными образованиями первых столетий нашей эры и средиземноморскими и дальневосточными цивилизациями и степень их взаимовлияния. Все же можно полагать, что такие связи с Китаем, Индией и Византией были. Несторианские ученые, изгнанные из Византии, нашли себе убежище в Персии и Бактрии. Следы проживания несториан заметны во многих местностях Средней Азии, вплоть до границ Монголии. Культурное влияние несториан тем более бесспорно, что некоторые азиатские алфавиты возникли из несторианского.

Как и в Египте и Междуречье, в Средней Азии источником развития древней культуры было поливное земледелие. Технические и хозяйственные мероприятия, связанные с ирригацией засушливых земель, требовали знания приемов практической геометрии, арифметики, астрономии, естествознания, а также разработанного календаря. Содержание разработанных календарных систем в доарабской Средней Азии изложено в известном сочинении ал-Бируни. Потребности земледелия явились также причиной возникновения обработки металлов и горного дела. Известно, что руды добывались в Средней Азии еще до нашей эры, ремесленники Хорезма и Согдианы изготавливали металлические изделия даже для внешней торговли.

Со времен завоевательных походов Александра Македонского и образования греко-бактрийского государства среднеазиатская культура начинает испытывать влияние эллинистической культуры, с одной стороны, и буддийской культуры северной Индии — с другой. Сохранившиеся памятники изобразительного искусства в Средней Азии и Индии наглядно доказывают взаимовлияние этих культур.

Косвенным доказательством существования математической культуры в доарабской Средней Азии является ее последующий быстрый расцвет. Начало исламско-арабской математики было связано с освоением культурного наследия завоеванных стран. Именно благодаря тому, что Средняя Азия была перекрестком азиатских дорог и имела исторические связи с северной Индией, основы индийской математики, излагавшиеся в школах буддийских монастырей, попали на арабский Восток и таким образом стали достоянием средиземноморского культурного круга.

Арабское завоевание. Ал-Хорезми

Географическое положение среднеазиатских культурных центров — на перекрестке важнейших путей, связывающих Дальний Восток и Южную Азию с Восточной Европой, Кавказом и Средиземноморьем, — способствовало развитию новой и оригинальной культуры. Однако оно же было причиной тяжелых бедствий, которые терпели народы Средней Азии от нашествий кочевых воинственных орд, так как богатые и хорошо обработанные земли Согдианы, Хорезма и других государственных образований являлись большой приманкой для завоевателей. Одним из таких нашествий было арабское. Во время этого завоевания среднеазиатская культура была уничтожена. «И всеми способами рассеял и уничтожил Кутейба всех, кто знал письменность хорезмийцев, кто хранил их предания, всех ученых, что были среди них, так что покрылось все это мраком и нет истинных знаний о том, что было известно из их истории во время пришествия к нам ислама», — писал о нашествии арабов ал-Бируни.

Некоторые из западноевропейских ученых, исследовавшие историю науки Ближнего и Среднего Востока, объединяли ее под названием арабской науки. Однако арабы в первом периоде своей истории не только не были творческой силой, ибо культура их была значительно ниже культуры завоеванных ими народов, но в ряде случаев даже уничтожали культурное наследие прошлого, например малоазиатскую культуру. Характерно, что наивысшего развития арабизированная культура достигла именно в тех странах, где местная культура уже имела длительную и насыщенную фактами историю, — в Средней Азии, Египте и южной Испании. Новая, исламская культура этих народов несла на себе ясно выраженную печать древних местных культур. Действительно, в VIII—IX вв. многие ученые, писавшие на арабском языке, были среднеазиатского, иранского и египетского происхождения.

Несмотря на исламское влияние, характерные черты местных культур, присущие им одним, продолжали развиваться. Существует, например, глубокое различие между изобразительным искусством и архитектурой Средней Азии и Испании, двух противоположных окраин мусульманского мира того времени. Подобное же наблюдается и в науке, в частности в математике: вклад хорезмийских ученых предполагает длительное предварительное развитие в местных условиях. Последствия арабского завоевания были частично изжиты лишь во второй половине XIII в. С этого времени наука и культура среднеазиатских народов развиваются, в какой-то степени приспособившись к новым условиям.

Борьба против арабских завоевателей продолжалась длительное время. Ухудшившееся положение населения, которое должно было платить налоги и местным феодалам, и чужеземным захватчикам, вызвало ряд восстаний. Самым крупным было восстание Муканны, охватившее в 70-х годах VIII в. весь Мавераннахр.

С середины VIII в. среднеазиатские города восстанавливают свою роль культурных центров. В частности, в 751 г. в Самарканде было начато производство бумаги. В течение более полутора столетий Самарканд был монополистом этой отрасли производства в халифате. С конца IX в. производством бумаги начали заниматься и другие центры халифата.

Не без влияния среднеазиатских ученых началось и накопление научной литературы на арабском языке. Обычно считается, что первым этапом развития арабоязычной литературы была серия переводов важнейших научных сочинений с греческих, главным образом, оригиналов. Но это не совсем так. Не наличие переводов вызвало развитие науки, а, наоборот, потребности развивавшейся науки стимулировали появление переводов необходимых сочинений. Большую роль в этом сыграли ученые, собранные при дворе халифов в Багдаде. Одним из наиболее выдающихся ученых был математик ал-Хорезми.

Мухаммед ибн-Муса ал-Хорезми (780—847) родился в семье, относительно поздно принявшей ислам, о чем свидетельствует его прозвище — ал-Маджуси из (семьи магов). Из-за тяжелого положения на родине, испытывавшей ужасы арабского завоевания, а может быть, и побавшаяся репрессий за свои связи с «магами», ал-Хорезми в последние годы VIII в. переселился в Багдад. В начале IX в. Багдад был развитым культурным центром. Ученые из разных стран, покоренных арабами, съезжались сюда, ибо только здесь у них была возможность заниматься научной работой. В Багдаде по образцу Александрийского музея был построен Бейтал-Хикма (Дом мудрости), представлявший собой нечто вроде академии с обсерваторией и библиотекой.

С 815 г. во главе Дома мудрости стал ал-Хорезми. Здесь им, а отчасти под его руководством, были выполнены работы по астрономии, географии и математике. Около 820 г. были составлены астрономические таблицы «Зидж», в основу которых положены известные таблицы Птолемея. До нас они не дошли и известны лишь в латинской рукописи 1126 г. К этому же времени относится измерение дуги меридиана, произведенное в районе между Тадмором и ар-Раккой, причем полученная величина расстояния между 35° и 36° с. ш. составила $56\frac{2}{3}$ арабских миль — 111 815 м, т. е. была лишь на 877 м больше истинной величины.

Из математических работ ал-Хорезми до нас дошли в более или менее цельном объеме два трактата — арифметический и алгебраический, — сыгравшие значительную роль в развитии мировой науки. Трактат по арифметике, в сущности, является первым в мировой литературе руководством для обучения счету. Полагают, что он попал в Европу в конце XI или начале XII в. через мавританскую Испанию. Известно его изложение на латинском языке (хранится в библиотеке Кембриджского университета). Начинается оно словами «Dixit Algorizmi», т. е. «Сказал Алгоризм (ал-Хорезми. — *Ред.*): пусть бог позволит нам вознести хвалу нашему вождю и защитнику». Рукопись обрывается на умножении дробей. О дальнейшем содержании трактата можно судить по другим двум рукописям, также содержащим его изложение: «Книга Алгоризма

о практике арифметики» («*Liber Algorismi de practica arismetricalae*») и «Книга введения Алхоризма в астрономическое искусство, составленная магистром А» («*Liber ysagogarum Alchorismi artem astronomicam a magistro A composito*»). Оба сочинения также, очевидно, южноиспанского происхождения.

Основными разделами трактата являются нумерация, действия с простыми числами и учение о дробях. В первом разделе ал-Хорезми излагает «индийский» способ записи чисел при помощи десяти знаков. Во втором — действия с простыми числами, их он насчитывает шесть — сложение, вычитание, удвоение, раздвоение, умножение, деление (почему он выделил удвоение и раздвоение, не совсем ясно; скорее всего эти действия заимствованы им из среднеазиатского народного счета).

Дроби ал-Хорезми делит на немые и выговариваемые, в связи с особенностью арабского языка, в котором есть особые слова для дробей со знаменателями от 2 до 9. Эти дроби называются выговариваемыми, а все прочие — немymi. Учение о дробях делится на два раздела: действия с шестидесятеричными и обычными дробями. Последовательность шести операций та же, что и при действиях с простыми числами. Действиям с обычными дробями предшествует приведение числителей к единице, т. е. они производятся так же, как в древнем Египте. К этому следует добавить несомненное индийское происхождение нумерации и ссылке ал-Хорезми на индийское происхождение действий с шестидесятеричными дробями, что также свидетельствует о сложности образования среднеазиатских культур. Все средневековые руководства по арифметике являлись, в сущности говоря, вариантами и переделками этого сочинения ал-Хорезми.

Не менее плодотворным было влияние и второго математического трактата ал-Хорезми, посвященного алгебре. Трактат этот называется «Краткий трактат об исчислении восстановления и противопоставления» и представляет собой практическое руководство по математике. Сохранился в ряде рукописей. Содержит учение об уравнениях первой и второй степеней, тройное правило, правила решения некоторых геометрических задач при помощи алгебры и учение о расчетах по мусульманскому наследственному праву, занимающее почти половину всего сочинения.

Этот трактат ал-Хорезми является первым в мировой литературе руководством по алгебре. Изложение в нем ведется в словесной форме, так как ал-Хорезми не применял символики. Само название трактата дало название науке: от слова «ал-джабр» (восстановление) произошло слово «алгебра». Ал-Хорезми применил это слово, как и слово «ал-мукабала» (противопоставление), в качестве указания на метод решения изложенных в сочинении задач. Противопоставление определяет операцию, при которой подобные члены сводятся в один, а восстановление показывает, что члены обеих частей уравнения приводятся к положительной форме.

Все уравнения ал-Хорезми приводит к шести типам:

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1. $ax^2 = bx$. | 4. $x^2 + bx = c$. |
| 2. $ax^2 = c$. | 5. $x^2 + c = bx$. |
| 3. $bx = c$. | 6. $x^2 = bx + c$. |

Пусть, например, дана некоторая задача ¹, условие которой можно записать в виде

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58,$$

или

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Ал-Хорезми производит следующие преобразования:

$$\text{ал-джабр} - 2x^2 + 100 = 58 + 20x;$$

$$\text{ал-мукабала} - x^2 + 21 = 10x$$

(делит на 2 и приводит подобные члены), в результате чего получается уравнение, относящееся, по классификации ал-Хорезми, к пятому типу. Он не объясняет, как выполняются эти операции. Можно полагать ², что они были достаточно хорошо известны современникам автора и поэтому в пояснениях не нуждались.

Далее в трактате на нетрудных примерах поясняются действия с алгебраическими выражениями. В этой части трактата отражено как индийское, так и греческое влияние. Второй, весьма краткий раздел о тройном правиле и, собственно, не относящийся к алгебре, носит следы индийского влияния. Третий раздел, озаглавленный «Масахат» («Измерения»), посвящен некоторым применениям сведений, полученных в первом разделе, и решению ряда геометрических задач. Ал-Хорезми приводит теорему Пифагора с доказательством, измеряет площадь 12 геометрических фигур, в том числе треугольников, четырехугольников и круга, находит объем прямой призмы, цилиндра, пирамиды, усеченной пирамиды и конуса. Для числа π он дает три значения: $\frac{22}{7}$ (для практического употребления), $\sqrt{10}$ и $\frac{62\,832}{20\,000}$ (применявшиеся геометрами). Этот раздел, равно как и предыдущие, отражает влияние индийской и греческой математики.

В последней части трактата изложены задачи, связанные с мусульманским наследственным правом. Поскольку имущественные взаимоотношения, обусловленные этим правом, принимали зачастую очень сложные формы, то возникла необходимость в достаточно подробном практическом руководстве. Задачи решались с применением тех же алгебраических операций — ал-джабр и ал-мукабала. В латинских переводах, выполненных в Западной Европе, этой части нет, так как она не представляла никакого интереса для читателя.

Есть сведения о том, что кроме упомянутых ал-Хорезми написал еще несколько трактатов, но они пока не найдены. Однако и дошедшие до нас его сочинения свидетельствуют о том, что он был одним из наиболее выдающихся математиков раннего средневековья. Сочинения ал-Хорезми

¹ А. П. Юшкевич. История математики в средние века. Физматгиз, М., 1961, стр. 193.

² M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd 1. Leipzig, 1907, S. 722.

имели большое методическое значение, они послужили образцом для создания учебников в странах как Ближнего Востока, так и Западной Европы. Сочинения его очень характерны для ученого среднеазиатского происхождения, для которого не были чуждыми ни рассуждения греков, ни умозаключения индийских ученых. Широта охвата и способность объединить результаты таких разнородных культур знаменуют переход от замкнутой местной науки к науке, являющейся достоянием каждого, не зависимо от происхождения. Эта широта была особенно характерна для среднеазиатских ученых эпохи Средневековья.

С Домом мудрости связаны и первые работы в области тригонометрии. Один из ученых Дома мудрости Ахмед ибн Абдалла ал-Мервази из Мерва (ок. 770 — ок. 870), которого называли ал-Хабаш — «вычислителем», пользовался в гномонике тангенсом и котангенсом, как отношениями сторон прямоугольного треугольника. Он составил таблицы значений тангенсов и котангенсов для некоторых величин угла с точностью до секунды. Он же ввел понятие косеканса. К этому времени относится и начало применения тригонометрии для астрономических вычислений.

Ал-Аббас ибн Саид ал-Джаухари, возможно, из Фараба, современник и сотрудник ал-Хорезми, занимался исследованием теории параллельных. Насираддин ат-Туси сообщает, что ал-Джаухари доказал постулат о параллельных, используя свойство накрестлежащих углов. Во всяком случае примечательным является сам факт, что «Начала» Евклида уже вошли в обиход ученых Дома мудрости.

Таким образом, к середине IX в. среднеазиатские ученые уже обладали знаниями, необходимыми для начала самостоятельной работы в области математики. Стимулом для развития последней продолжали оставаться требования практики — земледелия, техники и имущественных взаимоотношений.

3

Развитие математики в Средней Азии в IX—XI вв.

IX—X вв. для народов Средней Азии — это период относительной стабилизации и связанного с ней развития хозяйственной и культурной жизни. Экономической основой развития среднеазиатских народов было сельское хозяйство — земледелие и скотоводство. Некоторое значение имело горное дело, техника которого была очень невысокой. Разрабатывались главным образом серебряные и свинцовые руды, а иногда и железо. В городах были сосредоточены ремесло и торговля.

Рост производительных сил обусловил ряд существенных изменений в производственных отношениях: резко сократилась доля рабского труда, использовавшегося в сельском хозяйстве, горном деле и ремесле. «В источниках почти ничего не говорится об использовании рабов... Конечно, это не означает, что рабы в производстве уже не использовались

совершенно, однако не вызывает сомнений тот факт, что рабство в Северном Хорасане и Хорезме в IX—X вв., как и в других странах Востока, стало еще больше приобретать характер домашнего рабства, столь характерного для феодального Востока и сохранявшегося там вплоть до XIX в.»³.

Характерным явлением для среднеазиатских государств IX—X вв. были рост феодальной собственности на землю и потеря земли крестьянами. В Мавераннахре вся обрабатываемая земля принадлежала султану, светским и духовным феодалам. Владельцы земли дробили ее на мелкие участки и сдавали крестьянам на правах аренды. Поскольку сельскохозяйственное производство целиком зависело от состояния оросительных систем, то управление водой уже очень рано стало важнейшей государственной задачей. С орошением было связано и развитие местной техники — водоподъемных приспособлений.

В середине IX в. власть в Средней Азии захватил местный феодальный род Тахиридов, члены которого были сначала наместниками халифа, а затем самостоятельными властителями. Затем Саманиды, находившиеся прежде в ленной зависимости от Тахиридов, захватили власть в Мавераннахре и Хорасане.

Период правления Саманидов (приблизительно X в.) характеризуется значительным подъемом культуры и науки. Растет роль городов: Самарканд, Мерв, Бухара, Ургенч становятся не только торгово-ремесленными, но и культурными центрами мирового значения. Начинает распространяться просвещение. Появляются школы, в которых обучают чтению корана, толкованию его, основам мусульманского права и арифметике или, во всяком случае, счету, необходимому для торговли. Можно предполагать, что значительного распространения достигло индивидуальное профессиональное ученичество. Более состоятельные люди для обучения своих детей приглашали домашних учителей.

Значительная международная торговля, которую вели Самарканд, Ургенч, Мерв и другие города, была бы совершенно невозможной без основательных математических знаний: слишком резкое различие существовало тогда между единицами измерения и монетными системами даже соседних народов. Кроме того, косвенным доказательством распространности познаний в счете и геометрии является сооружение оросительных систем.

Другим косвенным доказательством наличия математических знаний у широких слоев среднеазиатского населения являются памятники архитектуры. Характерная для этого времени конструкция — куб, перекрытый полусферическим куполом. Несколько позднее появляются своды, подобные сводам ранней готики. Один из наиболее ранних памятников этой эпохи — мавзолей Исмаила Саманида в Бухаре. Он представляет собой кубическую кирпичную конструкцию, которая переходит в полусферу купола при помощи стрельчатых парусов и промежуточных восьмигранника и шестнадцатигранника. Пространственные построе-

³ История Туркменской ССР. Т. 1. Кн. 1. Изд-во АН Туркменской ССР, Ашхабад, 1957, стр. 223.

ния такого типа свидетельствуют об основательных познаниях в стереометрии и, во всяком случае, о хорошем знании трактата ал-Хорезми, а может быть, и о других, не дошедших до нас сочинений. В то же время сооружения этой эпохи указывают на остатки древних, доарабских познаний у архитекторов: доарабские ступенчатогорочные паруса развились в паруса сводов. Трехчетвертные колонны по углам мавзолея Саманида также заимствованы из доарабской согдийской архитектуры.

В конце X в. кочевые тюркские племена заняли Мавераннахр и проникли в южные области Средней Азии, основным населением которых были ираноязычные земледельцы. В 999 г. они заняли Бухару, и уже в первые годы XI в. на месте единого государства Саманидов было два новых государственных образования — империи Караханидов и Газневидов. В государство Караханидов входили часть восточного Туркестана, Семиречье, Шаш, Фергана и Согдиана. Аму-Дарья отделяла его от империи Газневидов, граничившей с северной Индией и простиравшейся до южных берегов Каспийского моря. Хорезм первое время сохранял некоторую самостоятельность, но в 1017 г. также был включен в состав государства Газневидов.

Эпоха феодализма оказалась более благоприятной для развития культуры и искусства, чем время деспотий. Феодалы покровительствовали наукам и приглашали ученых к себе на службу, чтобы придать блеск своему двору, а также в узкопрактических целях, связанных со строительством дворцов, крепостей и мечетей, с астрологическими наблюдениями (желание узнать свою судьбу часто было даже у самых жестоких и невежественных властителей) и с торговлей. Поэтому не удивительно, что величайшие ученые арабоязычных стран IX—XI вв. были среднеазиатского происхождения. Абу Али Ибн Сина (Авиценна), ал-Фараби, ал-Фергани, Абу Рейхан ал-Бируни — все они родились в городах Средней Азии и все провели свою жизнь в скитаниях, в поисках покровителя, а иногда и просто куска хлеба. Это только крупнейшие ученые, но уже само их появление было возможно при наличии очень глубоких математических традиций и означало, что до них был достигнут некоторый средний культурный уровень. Выше упоминалось, что Самарканд того времени поставлял бумагу почти всему арабскому Востоку, несколько позже распространилась слава среднеазиатских переплетчиков; Ибн Сина говорит о том, что в его время в Бухаре были книжные лавки.

В IX в. в Доме мудрости вместе с ал-Хорезми работал уроженец Ферганы знаменитый астроном и математик ал-Фергани (Алфраганус). Его имя было хорошо известно не только в исламских, но и в западноевропейских странах. Он написал комментарий к Птолемею и «Начала астрономии», представляющие собой энциклопедию знаний его эпохи по астрономии и географии.

К следующему поколению ученых, работавших в начале X в., относится Абу Наср Мухаммед ибн Тархан ал-Фараби из Фараба (Отрар). Он родился около 870 г. в семье феодала. Учился у себя на родине, затем в Багдаде, жил в Средней и Малой Азии, под конец жизни поселился в Сирии, в Алеппо, где и умер в 950 г. Занимался ал-Фараби

в основном философией и был последователем Аристотеля в арабоязычных странах, за что его называли «вторым Аристотелем». Кроме того, изучал медицину, теорию музыки и математику. Известнейшее его математическое произведение «Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида» дошло до нас в древнееврейском переводе. В нем ал-Фараби дает определение и объяснение ряда математических понятий в трактовке перипатетиков. Так, о точке, линии, поверхности он пишет следующее: «В сочинениях математиков все это мыслится без этих качеств, будучи отвлеченными и обособленными от них, в то время как в физике все это рассматривается вместе с качествами. И когда разум выделяет их и исследует, рассматривая их без этих качеств, то он трактует только о том, что входит в их сущность и отвлечено от ощущения»⁴. В разделе, посвященном «выразимым и невыразимым числам», он рассматривает понятие иррациональности.

Из других сочинений ал-Фараби большую известность приобрели философский трактат «Рождение наук» и трактат по теории музыки «Великая книга музыки» (сам ал-Фараби был прекрасным музыкантом). По сочинениям ал-Фараби учились Ибн Сина и Омар Хайям.

Абу Мухаммед Хадим ибн ал-Хидр ал-Ходженди (дата рождения не известна, ум. в 1000 г.), математик и астроном, родился в Ходженде, жил и работал в Рее. Он сформулировал частный случай теоремы Ферма: не существует таких натуральных чисел x, y, z , чтобы выполнялось равенство

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

В тригонометрии доказал теорему синусов. В астрономии ему принадлежит изобретение секстанта, названного им в честь султана «секстантом Фахри». Секстант был главным инструментом в обсерватории Улугбека.

Одним из выдающихся математиков X в. был Абу-л-Вафа Мухаммед ибн Мухаммед ибн Яхья ибн ал-Аббас ал-Бузджани (940—980). Он родился в Бузджане (Хорасан). Жил и работал в Багдаде. Занимался математикой, астрономией, а также другими областями знания. Был одним из последних переводчиков греков.

Сохранилось его геометрическое сочинение «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений», состоящее из введения и 12 глав. В нем Абу-л-Вафа рассматривает решение трех типов задач. К первому типу он относит около 18 задач, решаемых при помощи постоянного раствора циркуля: построение перпендикуляра к данному отрезку, деление угла пополам, деление отрезка на несколько равных частей, построение правильных трех-, четырех-, пяти-, шести-, восьми- и десятиугольников на данном отрезке, вписанных в данный круг, и др. Вторую группу составляют задачи о преобразовании квадратов. К ним относятся преобразование в квадрат суммы нескольких квадратов и разложение квадрата в сумму нескольких квадратов. К третьей группе относятся задачи на описание правильных сферических многоугольников и на разбиение сферы на многоугольники.

⁴ Абу Наср ал-Фараби. Комментарии к трудностям во введениях к первой и пятой книгам Евклида — Проблемы востоковедения 1959, № 4, стр. 94

Подобную же практическую направленность имеет и другое сочинение Абу-л-Вафы — «Книга для писцов», представляющая собой руководство по элементам арифметики и геометрии. Правила в книге даны без доказательств. В ней весьма подробно изложено учение о дробях.

Абу-л-Вафа различает три типа дробей: главные (доли единицы от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{10}$), составные (со знаменателем 10) и соединенные дроби, являющиеся произведением главных дробей. Предварительным приемом при действиях с дробями у него, как и у многих других восточных математиков, служит приведение к шестидесятеричным дробям с числителем, равным единице.

В геометрическом разделе Абу-л-Вафа дает решения ряда практических задач. В частности, указывает правила вычисления поверхности сферы при помощи площади большого круга и вычисления объема шара.

В вычислениях Абу-л-Вафы $\pi = \frac{22}{7}$. Интересно, что он не выделил геометрию в особый раздел. В книге ей посвящена третья глава (первая и вторая — действия с простыми числами и дробями, четвертая и седьмая — задачи из области практической арифметики).

Есть сведения о том, что Абу-л-Вафа написал трактат об извлечении корней третьей, четвертой и седьмой степеней, однако этот трактат до нас не дошел.

Особенно значительными представляются результаты Абу-л-Вафы в области тригонометрии, хотя тригонометрия у него, как и у большинства восточных математиков, играет роль лишь инструмента для решения астрономических задач. В своей обработке «Алмагеста» Птолемея он излагает основы тригонометрии, причем исходит уже не из сторон прямоугольного треугольника, как ал-Мервази, а из линий в круге. Дополнительно к известным уже синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу Абу-л-Вафа ввел секанс и косеканс. Ему уже были известны следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha : r = \sin \alpha : \cos \alpha;$$

$$\operatorname{ctg} \alpha : r = \cos \alpha : \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha : \sec \alpha = \sin \alpha : r;$$

$$\operatorname{tg} \alpha : r = r : \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sec \alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Синус суммы и разности двух дуг Абу-л-Вафа выражает только через синусы:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Результатами, полученными таким образом, он пользуется на практике, при составлении тригонометрических таблиц. Ему принадлежит способ вычисления данных для этих таблиц, по точности своей значительно превосходящий все известные до него способы.

Вопросами сферической тригонометрии в применении к астрономии занимался младший современник Абу-л-Вафы, уроженец Хорезма, Абу Наср ибн Ирак (960—1020). По-видимому, независимо от ал-Ходжен-ти он дал одно из доказательств теоремы синусов. Перевел и снабдил полным комментарием «Сфеерику» Менелая Александрийского.

Вопросами практической математики занимался Абу-л-Хасан Али ибн Ахмед ан-Насави (дата рождения не известна, ум. ок. 1030 г.). Родился в Насе (Ашхабаде), жил и работал в Багдаде при дворе Буидов, а затем в Газне у султана Махмуда Газневида. Написал сочинение — «Достаточное об индийской арифметике», — посвященное практической арифметике и содержащее кроме обычных разделов извлечение квадратных и кубических корней. Занимался также комментированием греческих математиков, в частности Архимеда и Менелая Александрийского.

Одним из величайших ученых этой эпохи был энциклопедист Абу Али ал-Хусейн ибн Абдаллах ибн Сина, известный под именем Авиценны (980—1037). Он родился в Афшане, возле Бухары, в семье состоятельного чиновника. Ранние годы жизни провел в Бухаре. Родители пригласили домашнего учителя, который обучал его чтению корана, исламскому богословию, философии, а также началам математики и астрономии. В возрасте 10 лет он ознакомился с «индийским счетом», и с этих пор математика стала одним из его любимых занятий. В Бухаре в одной из книжных лавок он случайно купил сочинения ал-Фараби, по которым познакомился с учением Аристотеля. Благодаря удачному врачеванию султана он получил доступ в дворцовое книгохранилище, одну из богатейших среднеазиатских библиотек. «В это время, — пишет Ибн Сина, — я не досыпал ни одной ночи, да и в течение дня не занимался ничем иным, кроме наук... Возвращаясь к ночи в мое жилище, я ставил перед собой светильник и погружался в чтение или письмо. Если меня начинало клонить ко сну или я чувствовал слабость — несколько глотков из кубка возвращали мне силы и я вновь углублялся в работу... Когда же сон окончательно одолевал меня, то и во сне продолжал я обдумывать те вопросы, которыми занимался наяву, — многие проблемы уяснил я себе именно во сне. Такую жизнь вел я, пока не усвоил твердо всех наук и не овладел ими настолько, насколько это вообще доступно человеку»⁵.

В 999 г., когда пала династия Саманидов, Ибн Сина переехал в Хорезм, но в 1017 г., спасаясь от Махмуда Газневида, бежал в Иран, где жил, переезжая из города в город. Последние годы жизни он провел в Исфагане.

Ученый энциклопедических знаний, Ибн Сина занимался многими науками, в том числе философией, математикой и химией. Однако мировую славу принесли ему занятия медициной. Его медицинская энциклопедия в Западной Европе была основным врачебным руководством вплоть до XVII в.

Другие произведения Ибн Сины охватывают многие отрасли знания. Так, в «Книге исцеления» он рассматривает вопросы философии,

⁵ История народов Узбекистана. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1950, стр. 259.

естествознания и математики. В IX—XII частях даны комментарии к «Алмагесту» Птолемея, кратко изложены «Начала» Евклида и «Введение в арифметику» Никомаха. «Книга исцеления» писалась как практическое руководство, поэтому и математические ее разделы изложены так, чтобы по ним можно было изучать предмет. В частности, комментируя Евклида, он перерабатывает излагаемый материал и стремится сделать его более удобным для усвоения.

«Данеш-наме» («Книга знания») Ибн Сины, написанная на таджикском языке, также является энциклопедическим сочинением и содержит разделы, посвященные математике. Известно, что Ибн Сина написал и несколько комментариев к переводам работ греческих математиков.

Беличайшим ученым средневековой Средней Азии был Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед ал-Бируни (973—1048). Родился он в Хорезме в небогатой семье, жившей в предместьях города (Бируни — «человек из предместья», от слова «бирун» — предместье). В 995 г. ал-Бируни уехал из Хорезма и жил некоторое время в северном Иране. В 1010 г. он возвратился на родину и поселился в г. Ургенче, где при дворе хорезмшаха Абу-л-Аббаса ал-Мамуна был научный кружок, в который входили такие ученые, как Ибн Сина, Абу Наср ибн-Ирак, врач Ибн-ал-Хуммар, философ Абу Сахл ал-Масихи, историк Ибн Мискавейх. Членом кружка стал и ал-Бируни.

В 1017 г. Ургенч был захвачен Махмудом Газневидом. Газневид перевез к себе в Газну виднейших хорезмийских ученых, в том числе и ал-Бируни. Сопровождая Махмуда в его походах, ал-Бируни несколько раз посетил северную Индию.

Проведя значительную часть своей жизни в скитаниях и путешествиях, ал-Бируни научился уважать и понимать людей, к какому бы народу они не принадлежали. Качество это, крайне редкое в эпоху раннего феодализма, ставит его на голову выше современных ему и многих живших после него ученых. В нем нет и следа исламского фанатизма. С ранним беспристрастием он описывает обычаи индийцев и евреев, огнепоклонников и христиан.

Бируни был ученым-энциклопедистом, поэтому его труды охватывают почти все области знания, которыми занимались в те времена на арабоязычном Востоке. Одно из первых его сочинений посвящено восстанию Муканны («Известие об одетых в белое и о карматах»). Несколько позже, около 1000 г., он написал первый из своих знаменитых трактатов — «Памятники минувших поколений», в котором излагает способы исчисления времени у различных народов, сопоставляет их и показывает, как следует переходить от одних систем к другим. Уже здесь проявляются глубокие знания ал-Бируни в области астрономии и математики.

Основные математические работы Бируни — это «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства» и «Канон Масуда об астрономии и звездах», посвященный султану Масуду Газнеvidу. В третьей книге «Канона» собраны все знания по тригонометрии, которыми обладали народы арабоязычного Востока, а также внесены дополнения самого Бируни. Книга состоит из десяти глав.

В I главе вычисляются длины сторон правильных вписанных треугольника, квадрата, пяти-, шести-, восьми- и десятиугольника на основе построений хорд с помощью циркуля и линейки. Во II главе доказываются теоремы о хордах, равносильные теоремам о синусе суммы двух углов, разности двух углов, удвоенного угла, половинного угла и т. д. В III главе строится сторона правильного вписанного девятиугольника. Эту задачу ал-Бируни сводит к решению кубического уравнения при помощи геометрических построений. В результате одного из построений он получает уравнение $x^3 = 1 + 3x$, другое построение приводит к уравнению $x^2 + 1 = 3x$, а также решает эти задачи с помощью специального итерационного процесса. IV глава посвящена задаче трисекции угла. В ней рассмотрено 12 способов решения трисекции угла с помощью вставки и аналогичных приемов, предложенных различными математиками, начиная от Архимеда. В V главе на основе результатов предыдущей главы вычисляется отношение длины окружности к диаметру.

Глава VI содержит таблицы синусов. Правила пользования ими изложены в VII главе. Среди этих правил — правила линейного и квадратного интерполирования. В VIII главе рассмотрены тангенсы и котангенсы, приведены таблицы тангенсов и правила пользования ими. В этой же главе доказывается теорема синусов плоской тригонометрии. Главы IX и X посвящены сферической тригонометрии. В частности, доказывается сферическая теорема синусов⁶.

Тригонометрическими вычислениями ал-Бируни пользовался при составлении астрономических таблиц и в других своих астрономических сочинениях, например в работе «Расчет удаления солнечного апогея от точки весеннего равноденствия»⁷.

Есть сведения о том, что ал-Бируни написал сочинение об извлечении корней третьей и высших степеней. В трактате «Об индийских рашиках» он рассматривает тройное и производные от него правила решения арифметических задач. «В Индии, говорит ал-Бируни, он встречал задачи не более чем с одиннадцатью величинами, но их может быть любое нечетное число. Сущность правил и схемы выкладок подробно поясняются на практических примерах, исходные данные которых заносятся в два столбца. Особенно удачным было рассмотрение нескольких задач на пятерное правило с одинаковыми числовыми данными, но с величинами, находящимися в различных отношениях прямой или обратной пропорциональности. В приводимых задачах находится до 17 величин. Все примеры ал-Бируни — целочисленные, но тройные правила обоснованы с помощью общей теории составных отношений. При этом он ссылается на Евклида и его комментаторов. Доказательства ал-Бируни носят поэтому общий характер»⁸.

⁶ А. П. Юшкевич. История математики в средние века, стр. 288.

⁷ Х. У. Садыков. Астрономическое учение Бируни. — В кн: Бируни. Изд-во АН СССР. М.—Л., 1950.

⁸ А. П. Юшкевич. История математики в средние века, стр. 201.

Всего ал-Бируни написал более 150 трудов из разных областей знания. Арабский ученый Якут сообщает, что в одной мечети он нашел список работ ал-Бируни на 60 страницах. Однако большинство из них до нас не дошло. Но и тех, что остались, достаточно, чтобы считать ал-Бируни крупнейшим ученым. Следуя своим гуманистическим идеям, он писал для людей. Практическая направленность его работ видна в каждой написанной им строчке.

4

Средняя Азия в XII в. Математическое творчество Омара Хайяма

В XI и XII вв. в государственных образованиях Средней Азии повысилась роль тюркского этнического элемента. Тюркские кочевые племена, проникшие с севера и востока на территорию Мавераннахра в Хорезме, населенного ираноязычными народами, сами перешли к оседлой, земледельческой жизни и мало-помалу начали сливаться с автохтонами, образуя единый двуязычный народ при главенствующем значении тюркского языка. Во второй половине XI в. Махмуд Кашгарский писал: «Были люди, которые говорили по-тюркски и по-согдийски, были люди, которые говорили только по-тюркски, но не было людей, которые говорили только по-согдийски». В 1040 г. был наголову разбит Масуд Газневид. Южная часть Средней Азии, Иран и северный Ирак попали под власть Сельджукидов. Мавераннахр остался караханидским. Однако вскоре империя Караханидов распалась на множество феодальных государств и начал опять расти Хорезм. К этому времени относится подъем культурной и хозяйственной жизни в городах. Число их росло, они обстраивались новыми общественными и частными зданиями. Самарканд конца XII в. насчитывал 400 тыс. чел.

В городах развивалось ремесло, в частности производство ювелирных и художественных изделий, бытовой и строительной керамики, оружейное дело, ткацкое и кожевенное производство, выработка стекла и стеклянных изделий, производство бумаги, переплетное дело — весьма характерная для высокой культуры эпохи отрасль ремесла. Вместе с тем основой хозяйственной жизни Средней Азии оставалось сельское хозяйство. Изменился только характер эксплуатации непосредственных производителей. С XI в. в Средней Азии распространилось право условного землевладения — «икта». Икта представляла собой систему взаимоотношений между властителем и ленником: получавший икту имел право на некоторую постоянную долю доходов, главным образом налогов, с некоторого земельного участка. Право икты бытовало, главным образом, у Караханидов и Сельджукидов. Со временем наблюдался процесс перехода икты из права личного в право наследуемое. Крестьяне, имевшие личную свободу, должны были платить налог, в среднем составлявший до $\frac{2}{3}$ урожая, из которых половина шла помещику, а половина — государству.

Источником математических знаний оставалось поливное земледелие. Как и в Древнем Египте, в Средней Азии геометрия имеет ясно выраженную практическую, в частности землемерную, направленность. Тригонометрия же вообще длительное время не воспринималась как наука, а употреблялась исключительно в качестве вспомогательных расчетных методов для астрономии и гномоники. Это в значительной степени было связано с отсутствием алгебраической и тригонометрической символики.

Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (ок. 1048—1131). Родился в Нишапуре (Хорасан). О его жизни сохранилось очень немного сведений. После учебы в Нишапуре или в Балхе он покинул Хорасан и некоторое время жил в Самарканде, где написал свой алгебраический трактат, затем — в Бухаре. В 1074 г. по приглашению сельджуцкого султана Маликшаха Хайям приехал в Исфаган и начал работать при астрономической обсерватории. К этому периоду относится его второй математический трактат — «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида».

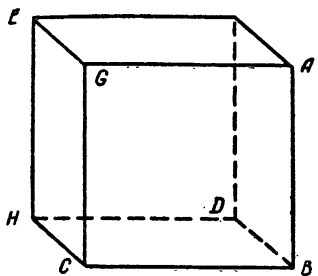
Некоторое время Хайям жил в Мерве и в Балхе. По-видимому, незадолго до смерти он снова поселился в Нишапуре. Последние его годы были омрачены преследованиями мусульманского духовенства, препятствовавшего развитию науки. В сущности, вся история среднеазиатской науки представляет собой непрерывную борьбу суннитского и шиитского духовенства с учеными, представителями «древней науки». Религиозный фанатизм позже явился причиной деградации среднеазиатской (да и вообще арабоязычной) науки.

Научное наследие Хайяма охватывает кроме двух уже отмеченных математических трактатов и «Маликшахских астрономических таблиц», сохранившихся только во фрагментах, один физический трактат и шесть историко-философских сочинений. Однако более известен Хайям как поэт. Пожалуй, не будет преувеличением сказать, что в его лице впервые в истории мировой науки гармонически слились «физик» и «лирик».

Алгебраический трактат Хайяма «О доказательствах алгебраических проблем» написан между 1069 и 1074 гг. Он содержит введение, решение уравнений первой, второй и третьей степеней, а также некоторых специальных видов уравнений.

Введение посвящено истории вопроса. «Один из поучительных вопросов, необходимых в разделе философии, называемом математикой, — пишет Хайям, — это искусство алгебры и алмукабалы, имеющее своей целью определение неизвестных, как числовых, так и измеримых. В нем встречается необходимость в некоторых очень сложных видах предположений, в решении которых потерпело неудачу большинство этим занимавшихся. Что касается древних, то до нас не дошло сочинение, в котором они рассматривали бы этот вопрос. Может быть, они искали решение и изучали этот вопрос, но не смогли преодолеть трудностей, или их исследования не требовали рассмотрения этого вопроса, или, наконец, их труды по этому вопросу не были переведены на наш язык»⁹.

⁹ Омар Хайям. Трактаты. Изд-во восточной литературы, М., 1961, стр. 69—70.



Чертеж к исследованию уравнения $x^3 = a$.

Далее Хайям пишет об условиях, в которых приходилось работать ученым, его старшим современникам и ему: «... Я был лишен возможности систематически заниматься этим делом и даже не мог сосредоточиться на размышлении о нем из-за мешавших мне превратностей судьбы. Мы были свидетелями гибели ученых, от которых осталась малочисленная, но многострадальная кучка людей. Суровости судьбы в эти времена препятствуют им всецело отдаться совершенствованию и углублению своей науки. Большая часть из тех, кто в настоящее время имеет вид ученых, одевают истину ложью, не выходя в науке за пределы подделки и притворяясь знающими»¹⁰.

Непосредственно после введения Хайям переходит к определению основных понятий науки, используемых им в трактате. При изложении Хайям пользуется геометрическим методом. Этим он добился как наглядности, так и ясности в изложении, чего нельзя было бы сделать иным путем, учитывая отсутствие символики.

Уравнения до третьей степени Хайям делит на простые и сложные. Шесть видов простых уравнений в принятой ныне символике имеют вид:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1) $x = a$; | 4) $x^2 = bx$; |
| 2) $x^2 = a$; | 5) $x^3 = cx$; |
| 3) $x^3 = a$; | 6) $x^3 = bx$. |

Сложные уравнения бывают трехчленные и четырехчленные. Существует 12 видов трехчленных уравнений:

$$\begin{array}{llll}
 x^2 + bx = a; & x^3 + cx^2 = bx; & x^3 + bx = a; & x^3 + cx^2 = a; \\
 x^2 + a = bx; & x^3 + bx = cx^2; & x^3 + a = bx; & x^3 + a = cx^2; \\
 x^2 = bx + a; & x^3 = cx^2 + bx; & x^3 = bx + a; & x^3 = cx^2 + a.
 \end{array}$$

Две разновидности четырехчленных уравнений охватывают следующие семь видов:

$$\begin{array}{ll}
 x^3 + cx^2 + bx = a; & x^3 + cx^2 = bx + a, \\
 x^3 + cx^2 + a = bx; & x^3 + bx = cx^2 + a; \\
 x^3 + bx + a = cx^2; & x^3 + a = cx^2 + bx. \\
 x^3 = cx^2 + bx + a;
 \end{array}$$

Все эти виды уравнений Хайям исследует, как уже отмечалось, геометрическим способом. Рассмотрим, например, простое уравнение третьего вида

$$x^3 = a.$$

Хайям исследует этот вид уравнения следующим образом (см. рисунок): «Третий вид: число равно кубу. Если предмет задачи — число, будет из-

¹⁰ О м а р Х а й я м Трактаты, стр. 69—70.

вестен куб этого числа. Нет другого средства найти его ребро, кроме последовательного подбора. Это относится и ко всем числовым степеням, как квадрато-квадрат, квадрато-куб, кубо-куб, о чем мы говорили выше.

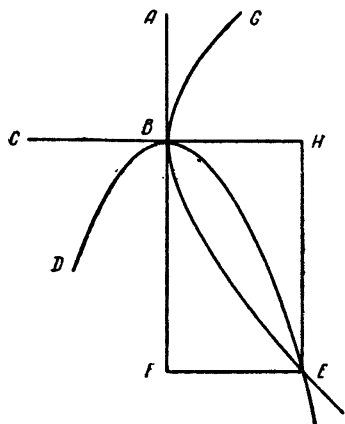
В геометрическом доказательстве предположим, что квадрат AD есть квадрат единицы, т. е. AB равна BD и каждая из этих двух сторон равна единице. Далее восстановим к плоскости AD в точке B перпендикуляр BC , как это показал Евклид в XI книге своего сочинения, и сделаем этот перпендикуляр равным данному числу. Дополним тело $ABCDEFGH$. Известно, что мера этого тела равна данному числу. Далее построим куб, равный этому телу. Однако построение этого куба производится только с помощью свойств [конических] сечений. Поэтому мы отложим это до тех пор, пока не приведем предварительных предложений, относящихся к этим свойствам.

Всякий раз, когда мы будем говорить: число равно телу, мы будем понимать под числом тело с параллельными гранями и прямыми углами, имеющее основанием квадрат единицы и высоту, равную данному числу»¹¹.

В качестве примера исследования Хайямом трехчленного уравнения рассмотрим уравнение вида (см. рисунок)

$$x^3 = bx + a.$$

«Третий вид: куб равен ребрам и числу. Положим [линию] AB равной стороне квадрата, равного числу ребер, и построим равное данному числу тело, основание которого есть квадрат AB . Пусть высота этого тела будет BC и пусть она будет перпендикулярна AB . Затем продолжим AB и BC в их направлениях и построим параболу, вершина которой — точка B , стрела имеет направление AB , а прямая сторона которой есть AB . Это будет [парабола] DBE . Она будет известна по положению и будет касаться линий BH в соответствии с тем, что показал Аполлоний в 33-м предложении I книги. Затем построим другое коническое сечение, гиперболу, вершина которой — точка B , стрела имеет направление BC , а обе стороны, прямая и поперечная, равны BC . Это будет гипербола GBE . Она будет известна по положению и будет касаться линии AB . Эти два конических сечения необходимо пересекутся. Пусть они пересекаются в точке E . Эта точка также известна по положению. Опустим из точки E два перпендикуляра EF , EH . Они будут известны и по положению и по величине. Линия EH — координатная линия [гиперболы], и, как показано выше, ее квадрат будет равен произведению CH и BH . Поэтому CH будет относиться к EH , как EH к HV . Но EH , равная BF , относится к HV , равной EF , которая есть ордината другого



Чертеж к исследованию уравнения $x^3 = bx + a$.

¹¹ Омар Хайям. Трактаты, стр. 75—76.

конического сечения, как EF к AB , являющейся прямой стороной параболы. Эти четыре линии пропорциональны: AB относится к NB , как NB к BF и как BF к CH , и квадрат AB , являющейся первой, относится к квадрату NB , являющейся второй, как NB , являющаяся второй, к CH , являющейся четвертой. Следовательно, куб NB будет равен телу, основание которого есть квадрат AB , а высота CH , так как их высоты обратно пропорциональны их основаниям. Но это тело равно телу, основание которого есть квадрат AB , а высота BC , которое мы сделали равным данному числу, вместе с телом, основание которого есть квадрат AB , а высота BH , равная данному числу ребер куба BH . Поэтому куб BH равен данному числу вместе с данным числом его ребер. Это и есть искомое.

Этим показано, что у этого вида нет многообразия случаев и что в его задачах нет ничего невозможного. Он был решен при помощи свойств параболы и гиперболы¹².

В решении Хайям учитывает только один из корней уравнения — положительный. «Если данное уравнение имеет вид

$$x^3 = bx + a,$$

то $AB = \sqrt{b}$, $BC = \frac{a}{b}$ и построенные Хайямом парабола и равносторонняя гипербола могут быть определены уравнениями $x = \sqrt{e}y$ и $\left(x + \frac{a}{2b}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{a}{2b}\right)^2$ или $x\left(x + \frac{a}{b}\right) = y^2$, вследствие чего абсцисса точки пересечения этих кривых удовлетворяет данному уравнению (положительное направление оси абсцисс здесь — направо). Хайям получает это, сравнивая пропорцию $CH : EH = EH : NB$, т. е. $\left(x + \frac{a}{b}\right) : y = y : x$, с пропорцией $EH : NB = EF : AB$, т. е. $y : x = x\sqrt{b}$, откуда

$$b : x^2 = x : \left(x + \frac{a}{b}\right) \text{ или } x^3 = b\left(x + \frac{a}{b}\right), \text{ т. е. } x^3 = bx + a \gg^{13}.$$

Второй трактат Хайяма озаглавлен «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» и состоит из трех книг. Первая книга — «Истина параллельных и напоминание об известных сомнениях» — посвящена доказательству постулата Евклида. Хайям считает, что полностью разрешил все сомнения и предлагаемые им положения следовало бы включить в «Начала».

Вторая и третья книги — «Напоминание об отношении и смысле пропорции и их истине» и «Составление отношений и его исследования» — посвящены исследованию отношений и пропорций, роль которых в решении арифметических задач была весьма велика, так как, в сущности, в основу всех правил арифметики, разработанных средневековыми арабоязычными и западноевропейскими математиками, положены теории,

¹² Омар Хайям. Трактаты, стр. 87—88.

¹³ Там же, стр. 255 (комм. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича).

изложенные в «Началах» Евклида. По-видимому, и у Хайяма первоначальный интерес к математике связан с арифметикой. Известно, что первым математическим трактатом Хайяма было сочинение «Проблемы арифметики», в котором, в частности, он изложил способ определения целых корней с любым натуральным показателем из целых чисел. А. П. Юшкевич полагает, что Хайяму был известен бином Ньютона для целых показателей ¹⁴.

Работы Хайяма являются высшим достижением среднеазиатской и иранской математики XI—XII вв. Одновременно с ним работали и другие математики, но это были уже ученые меньшего размаха. Да и обстоятельства не благоприятствовали развитию наук. Сельджукские султаны, которым были подчинены юг Средней Азии, Иран и Ирак, не только не покровительствовали наукам, но даже подозрительно относились к ученым, сомневаясь в их исламском правосерии. Подобное положение было и в караханидском Мавераннахре.

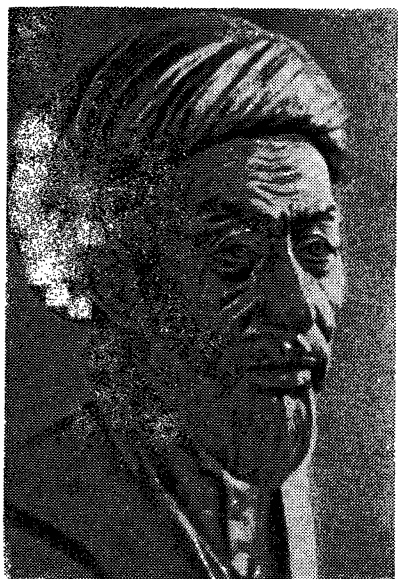
5

Монгольское завоевание Средней Азии и его последствия. Улугбек и его школа

Упадок империи Караханидов привел к ослаблению всех северных областей Средней Азии. Этим воспользовался Хорезм. В первой половине XII в. Хорезм входил еще в состав Сельджукского султаната, однако, благодаря оживленной торговле и развитому сельскому хозяйству, он все более и более усиливался. В 1138 г. орда каракитаев нанесла сокрушительный удар господству Караханидов и вскоре полностью овладела Мавераннахром. Выиграл от этого Хорезм, который поспешил овладеть соседними княжествами. К концу XII в. государство Хорезмшахов представляло собой уже самое мощное государственное образование в Средней Азии. Кроме собственно Хорезма оно владело северным Ираном и прикаспийскими областями. Хорезмшах Мухаммед (1200—1220) овладел Бухарой и значительной частью Мавераннахра, войдя в непосредственное соприкосновение с владениями каракитаев и частично поставив их в зависимость от Хорезма.

Еще раз воскресли древние культурные традиции Хорезма: новый подъем переживали литература, наука и искусство. В 1178—1179 гг. ученый Фахраддин ар-Рази закончил энциклопедический труд «Собрание наук», в котором представлены 57 отраслей наук, в том числе естественные и технические. Значительного развития достигла архитектура: хорезмские строители изобрели новые типы сводчатых и купольных перекрытий. Начала развиваться живопись. Происхождение живописи в Средней Азии имеет глубокие, местные корни, связанные с гре-

¹⁴ А. П. Юшкевич. Омар Хайям и его «Алгебра». — В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2, 1948, стр. 499.



Скульптурный портрет Улугбека.
Реконструкция М. М. Герасимова по черепу.

ко-бактрийским искусством и с религиозным течением манихеев. Сохранились сведения, что сам Мани (III в. н. э.) был крупным художником.

В 20-х годах XIII в. среднеазиатские народы пережили монгольское нашествие. Их города были сожжены и разрушены монгольскими ордами Чингис-хана. Точно так же, как Русь преградила монголам дорогу на запад и спасла западноевропейскую культуру, Средняя Азия, ценой своих бедствий и гибели культурных ценностей, спасла южные арабоязычные культуры.

Война 1219—1221 гг. была для среднеазиатских народов не меньшим несчастьем, чем арабское завоевание. Монголы уничтожили многочисленные материальные и культурные ценности. Они превратили в развалины города Ургенч, столицу Хорезма, и Мерв, уничтожили систему орошения — основу среднеазиатского зем-

леделия. Ущерб был настолько велик, что даже через 100 лет после нашествия Чингис-хана, в первой четверти XIV в., не все еще было восстановлено. Особенно в тяжелом положении оказалось трудовое население — крестьяне и ремесленники, которым пришлось платить подати и своим феодалам и монгольским завоевателям. Городская беднота восставала. Одним из первых было восстание Тараби в Бухаре в 1238 г.

Хозяйственная разруха обусловила упадок науки и культуры. Как и после арабского завоевания, развитие науки прекратилось на полтора-два десятилетия. Немногие ученые спаслись во время нашествия, но и они бежали в Ирак, Египет, Северную Африку. Можно предположить, что школы все же продолжали свое существование и в первые десятилетия после монгольского нашествия, но они все в большей и большей степени приобретали религиозный характер. Очевидно, что процесс захвата школы мусульманскими богословами, начавшийся еще при господстве Махмуда Газневида и сельджукских султанов, был завершен при власти монголов. В начале XIV в. в Средней Азии (входившей в то время в состав улуса Чагатай) была проведена реформа монетной и весовой системы. Уже сам характер монетно-весовой системы показывает, что лица, создавшие ее, обладали значительными познаниями в математике. Это свидетельствует о том, что среднеазиатская научная традиция все же в какой-то мере продолжала существовать.

До второго десятилетия XIV в. в Средней Азии существовала сложная правительственная система. Положение начало изменяться лишь в царствование Кебек-хана (1318—1326), когда была установлена единая

ханская власть. Во второй половине XIV в. происходил процесс некоторого сращивания монголов с местным населением. Монголы, оседая среди значительно более культурного тюркоязычного населения, постепенно начали сливаться с автохтонами. Одновременно наблюдалось и ослабление центральной власти за счет растущего могущества отдельных феодалов.

Феодалной раздробленностью Мавераннахра воспользовался один из эмиров — Тимур (Тамерлан). В 1366 г. он начал захватывать мелкие феодалные владения своих соседей, а к 1370 г. весь Мавераннахр уже был под его властью. В 1388 г. Тимур захватил Хорезм. К этому времени уже почти все среднеазиатские земли входили в состав его владений. Затем он разгромил сельджуков и захватил их земли. Своей столицей Тимур сделал Самарканд, который, таким образом, стал столицей огромного государства, объединявшего кроме Средней Азии, Иран, значительную часть Малой Азии и северную Индию.

Однако эта империя продолжала оставаться феодальным образованием и ненадолго пережила своего властелина. С 1405 по 1409 г. продолжались войны между потомками Тимура и подчинявшимися ему эмирами. Только в 1409 г. удалось создать в некотором смысле единую монархию с двумя центрами — в Герате и Самарканде. Во главе первого был сын Тимура Шахрух (1409—1447), а второго — сын Шахруха Улугбек, один из наиболее выдающихся среднеазиатских ученых.

Мухаммед Тарагай Улугбек родился в 1394 г. Правление его не славилось особенными военными победами, но зато составило эпоху в восстановлении среднеазиатской культуры и в дальнейшем ее развитии. Роль Улугбека как крупного, по тому времени, ученого и организатора науки и культуры трудно переоценить. Он построил три медресе — в Самарканде, Бухаре и Гиждуване. Есть сведения, что в Самаркандском медресе, которое было закончено в 1420 г., в числе других наук преподавалась и астрономия.

Улугбек был представителем нового типа ученого — ученого-специалиста. Всю свою научную деятельность он посвятил астрономии. Математическими вычислениями он занимался лишь постольку, поскольку они были нужны ему для астрономии. При нем в Самарканде была построена знаменитая обсерватория (обсерватория Улугбека). Это было трехэтажное высокое круглое в плане здание. Остатки основной конструкции его — гигантского секстанта Фахри — сохранились до наших дней. Самарканд времени Улугбека стал виднейшим центром науки и искусства. Здесь жили и творили астрономы, математики, историки, географы, философы, художники и поэты. Ко времени Улугбека относится и развитие самаркандской школы миниатюрной живописи. Однако реакционные круги высшего духовенства и знати видели в Улугбеке враждебную силу, которая могла подорвать влияние ислама. И 27 октября 1449 г. по их указке Улугбек был убит.

Из сохранившихся трудов Улугбека с точки зрения истории математики представляют интерес астрономические таблицы, составленные на основании наблюдений Улугбека и его учеников и помощников,

географические таблицы, таблицы летоисчисления и тригонометрические таблицы.

Выполнение всех этих работ требовало глубоких знаний математики и умения применять методы вычислений. «Так как,— пишет Улугбек,— построение таблиц для дробных частей градуса потребовало бы слишком много труда, то столбец с вводными (начальными) цифрами располагается в такой последовательности, которая более всего соответствует каждому объекту, и против каждого числа помещаются пропорциональные им части. Если после этого мы хотим найти пропорциональную часть какого-нибудь (промежуточного) числа, не вошедшего в столбец с начальными (основными) числами, то мы выбираем в этом столбце два других числа таким образом, чтобы первое из них было меньше искомого числа, а второе — больше его; затем мы находим разность между пропорциональными частями, соответствующими этим двум числам; мы умножаем эту разность на разность первого из двух вводных (начальных) основных чисел и искомого числа и произведение делим на разность двух вводных чисел; частное мы прибавляем к пропорциональной части меньшего числа, если пропорциональные числа расположены в восходящем порядке, в противном случае, чтобы найти (соответствующую) пропорциональную часть искомого числа, мы производим вычитание...»¹⁵

Точность этих таблиц весьма высока. Например:

в таблицах Улугбека				в современных таблицах			
α	$\sin \alpha$			α	$\sin \alpha$		
20	0.342	020	142	20	0.342	020	143
23	0.390	731	129	23	0.390	731	128
26	0.438	371	147	26	0.438	371	147

Из ученых, работавших вместе с Улугбеком, наибольшей известностью пользовался Гиясаддин Джемшид ибн Масуд ал-Каши, уроженец Кашана (Иран; род. в третьей четверти XIV в., ум. в 1429 г.). Он занимался математикой и астрономией. Из математических его сочинений прославился «Ключ к арифметике», представляющий собой наиболее полное руководство по арифметике и другим разделам элементарной математики. Сочинение состоит из пяти книг: об арифметике целых, об арифметике дробей, об исчислении астрономов, об измерении и о нахождении неизвестных.

В первой книге, в главе «Об определении основания степени», ал-Каши дает правило извлечения корня любой степени из целых чисел и поясняет его на примере извлечения корня пятой степени.

¹⁵ Т. Н. Кары-Ниязов. Астрономическая школа Улугбека. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 144.

Корень $\sqrt[n]{a^n + r}$ он приравняет приближенному выражению $a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$, которым и пользуется при вычислении корней, и получает

$$\sqrt[5]{44\,240\,899\,506\,197} \approx 536 \frac{21}{414\,237\,740\,281}.$$

Для более точного вычисления иррационального корня ал-Каши умножает его и одновременно делит на некоторую степень 10:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{10^{2h}N}}{10^h}.$$

Для приближенного вычисления дробной части иррационального корня он пользуется правилом возведения двучлена (бинома) в любую степень. Ал-Каши составил таблицу биномиальных коэффициентов:

9								
36	8							
84	28	7						
126	56	21	6					
126	70	35	15	5				
84	56	35	20	10	4			
36	28	21	15	10	6	3		
9	8	7	6	5	4	3	2	

Формула, которой он при этом пользовался, в современных обозначениях имеет вид

$$(a+b)^n - a^n = C'_n a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

и для $b = 1$

$$(a+1)^n - a^n = C'_n a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \dots + 1.$$

Во второй книге изложена теория десятичных дробей.

Четвертая книга трактата посвящена измерениям геометрических фигур и тел. При вычислениях ал-Каши пользуется не только алгебраическими, но и геометрическими формулами. Как известно, у средневековых арабоязычных математиков тригонометрия, в сущности, являлась подсобной наукой, вернее собранием правил, применяемых при астрономических вычислениях, а также в вычислениях, связанных с гномоникой. Ал-Каши применяет тригонометрию в практических целях. Так, при вычислении площади треугольника он пользовался формулой радиуса вписанного круга:

$$r = \frac{bc \sin \alpha}{a + b + c}.$$

Умножая радиус на полупериметр, получал искомую формулу:

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2}.$$

Вычислял также объемы некоторых тел. В приложенной таблице даны характеристики пяти правильных тел. Кроме того, ал-Каши выполнил ряд сложных геометрических расчетов и построений некоторых архитектурных конструкций.

Содержание последней, пятой, части трактата относится к алгебре и к теории пропорций. Рассмотрены действия с многочленами, решение линейных уравнений с помощью «правила двух ложных положений», приведены формулы для суммы членов числовых рядов.

Энциклопедическая работа ал-Каши играла значительную роль в развитии математики в арабоязычных странах в течение сотен лет. Литографированное издание «Ключа к арифметике» было выпущено в Тегеране в 1889 г.

Второе математическое сочинение — «Трактат об окружности» ал-Каши написал на арабском языке около 1424 г. Содержанием его является вычисление значения числа π . Постановка задачи следующая: необходимо выразить длину окружности через диаметр с такой точностью, чтобы погрешность в вычислении длины окружности, диаметр которой равен 600 000 диаметрам Земли, не превышала толщины конского волоса. При определении длины окружности ал-Каши пользуется методом вычисления длин последовательности хорд $c_1, c_2, \dots, c_n$ для дуг в $120, 150, 165, 172,5^\circ, \dots$, т. е. для дуг, выражаемых общей формулой

$$\alpha_n = 180^\circ - \frac{60^\circ}{2^{n-1}}.$$

Но по теореме Пифагора

$$a_n^2 = \sqrt{d^2 - c_n^2}.$$

Таким образом, с помощью этой последовательности хорд можно вычислить последовательность сторон вписанных многоугольников, ибо сторона a_n правильного вписанного в круг многоугольника и является хордой дополнения дуги α_n до 180° .

В результате серии вычислений ал-Каши получает значение 2π , которое переводит в десятичную дробь с 16 знаками:

$$2\pi = 6,283\,185\,307\,179\,5865.$$

«Трактат о хорде и синусе» известен в изложении Мирима Челеби (в его комментариях к астрономическим таблицам Улугбека). В нем ал-Каши решает задачу определения $\sin 1^\circ$ по известному $\sin 3^\circ$ и сводит ее к решению кубического уравнения

$$x^3 + Q = Px,$$

где

$$Q = \frac{r^2}{4} \sin 3^\circ \text{ и } P = \frac{3r^2}{4},$$

с помощью следующего итерационного приема.

Пусть P и Q — положительные числа и P значительно больше Q . Следовательно, x^3 , чтобы удовлетворить уравнению, должен быть соответственно меньше Q . Тогда $x = \frac{Q+x^3}{P}$ и $x \sim \frac{Q}{P}$. Обозначим: a — частное, R — остаток. Получим

$$Q = aP + R.$$

При этом точное значение $x = a + \beta$ больше a . Тогда

$$a + \beta = \frac{Q + (a + \beta)^3}{P} = a + \frac{R + (a + \beta)^3}{P} \sim a + \frac{R + a^3}{P}.$$

Обозначим далее: b — частное $\frac{R + a^3}{P}$, S — остаток. Тогда, полагая $x = a + b + \gamma$, получим

$$\begin{aligned} a + b + \gamma &= \frac{Q + (a + b + \gamma)^3}{P} = a + \frac{R + (a + b + \gamma)^3}{P} = \\ &= a + b + \frac{S - a^3 + (a + b + \gamma)^3}{P} \sim a + b + \frac{S + (a + b)^3 - a^3}{P}. \end{aligned}$$

Решение продолжаем этим способом до получения требуемой степени точности¹⁶.

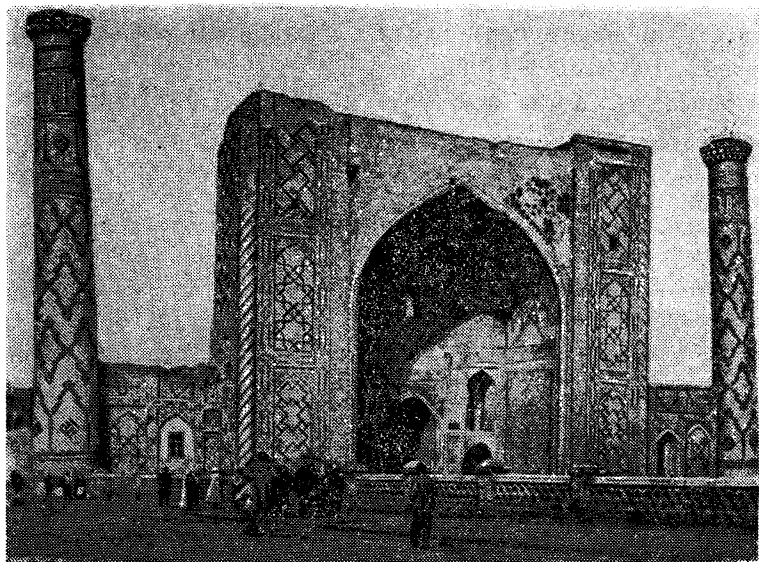
Наиболее известными астрономическими работами ал-Каши являются: «Усовершенствованные Ильханские таблицы хакана» (написаны на таджикском языке, 1413—1414 гг.), «Лестница небес» (об измерении небесных тел, на арабском языке), «Услада прекрасных садов» (описывается изобретенный им астрономический инструмент).

В деятельности ал-Каши ярко выражена его заинтересованность инженерным делом, чего не было у других ученых Средней Азии. Об этом свидетельствуют его изобретения астрономических инструментов и расчеты архитектурных конструкций. Представляется совершенно определенным, что именно ал-Каши принадлежала основная роль при выполнении сооружений Улугбека.

Значительную роль в группе ученых, работавших с Улугбеком, играл его учитель Салахаддин Муса ибн Мухаммед ибн Махмуд Казизаде ар-Руми (1360—ок. 1437). Он родился в Малой Азии, по-видимому, греческого происхождения, жил и работал в Самарканде. После смерти ал-Каши руководил астрономическими наблюдениями. Ему принадлежат следующие работы: «Трактат об арифметике» (написан на арабском языке), геометрическая работа «Комментарий к „Основам фигур“» Шамсаддина ас-Самарканди и «Трактат о синусе», в основу которого положен метод ал-Каши.

Остальные работы ар-Руми относятся к астрономии. Он написал, в частности, комментарий к «Сущности астрономии» Махмуда ибн Мухаммеда ал-Чагмини, долгое время служивший руководством для изучения астрономии.

¹⁶ M. C a n t o r. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd 1, S. 782—783.



Медресе Улугбека.

Большую известность приобрел на Востоке ученик Улугбека и ар-Руми — Алааддин Али ибн Мухаммед Кушчи (последние годы XIV в. — 1474). Его называли Птолемеем своего времени. Он родился в Самарканде. После смерти Улугбека переселился в Стамбул.

Из работ Кушчи известны: «Трактат по арифметике», посвященный индийской математике (написан на таджикском языке), «Трактат Мухаммедия», посвященный арифметике и алгебре (написан на таджикском языке и самим автором переведен на арабский язык), «Трактат о решении лунообразной фигуры», а также ряд астрономических трактатов и комментариев.

Кроме названных выше в обсерватории Улугбека работало много других-ученых астрономов. Абдаллах ибн Мухаммед ибн Хусейн Бирджанди написал ряд астрономических трактатов, в частности составил комментарии к астрономическим таблицам Улугбека. Внук и ученик ар-Руми — Мирим Челеби (первая половина XV в. — 1524) также составил комментарий к этим таблицам. Ему принадлежит «Полный трактат о синусе» и ряд других сочинений.

Как уже отмечалось, после убийства Улугбека его ученики и помощники, спасаясь от преследований, бежали в Азербайджан, Иран и Турцию, унося с собой не только знания, но и значительное количество ценнейших научных трудов. Самаркандское медресе Улугбека превратилось в простую духовную школу, астрономическая же обсерватория была разрушена настолько, что уже через несколько поколений у жителей Самарканда не осталось даже памяти о ней. Так Самарканд был низведен с пьедестала одного из наиболее крупных научно-культурных центров Средней Азии.

Культурное развитие Средней Азии в XVI—XVIII вв. Уровень математических знаний

В XVI в. ссоры между Тимуридами, выражавшиеся в феодальных войнах, не прекращались. Этим воспользовались узбекские ханы, которые еще во второй половине XV в. начали завоевание орошаемых земель. В 90-х годах столетия узбекский хан Шейбани закрепился в низовьях Сыр-Дарьи, а в 1500 г. овладел Самаркандом, Бухарой, Ташкентом, Ферганой и другими городами. К 1507 г. вся Средняя Азия, включая область Герата, была уже во власти узбекского хана. Независимым остался лишь Хорезм, хотя в нем утвердилось династия также узбекского происхождения. Хорасанские владения тимуридов были захвачены Ираном.

В XVI в. Средняя Азия находилась под властью двух узбекских династий, правивших в Бухаре и Хиве. На севере к Бухарскому и Хивинскому ханствам примыкали земли, в которых кочевали казахи и каракалпаки; с северо-востока начали проникать в области Ферганы и Кашгара киргизы. Значительное большинство туркменских племен, частью оседлых, частью кочевых, находилось под властью Хивы. Основное же население составляли ираноязычные таджики и тюркоязычные узбеки. К этому же периоду относится начало торговых и дипломатических связей среднеазиатских ханств с Московским государством. В 1558 г. Иван IV направил ханам письмо, в ответ на которое в Москву прибыли хивинское и бухарское посольства. А в XVII в. «размеры торговых оборотов между Средней Азией и Московским государством были довольно значительны. По имеющимся приблизительным подсчетам, общий оборот торговли между названными странами выражался в сумме около 100 000 руб. ежегодно, что составляло около $\frac{1}{5}$ части основной заграничной торговли Московского государства через Архангельский порт»¹⁷.

Внутренняя жизнь обоих среднеазиатских ханств в XVII в. характеризуется развитием феодальных взаимоотношений, в результате чего правившая в Бухаре династия потомков астраханских ханов к концу столетия уже не имела реальной власти. Подобное явление происходило и в Хиве. Процесс этот продолжался приблизительно до середины XVIII в. К середине же столетия относится возникновение в области Ферганы третьего крупного государственного образования в Средней Азии — Кокандского ханства. Впрочем, кроме трех феодальных монархий в XVIII в. в Средней Азии существовали и более мелкие княжества.

Во второй половине XVI в. культурным центром Средней Азии

¹⁷ П. П. Иванов. Очерки по истории Средней Азии. Изд-во восточной литературы, М., 1958, стр. 78.

становится столица узбекских ханов — Бухара. Изменяется и направленность культуры. Ее создают уже не астрономы, математики и естествоиспытатели, а богословы, философы и литераторы. Одной из основных причин такой направленности среднеазиатской культуры был затянувшийся феодализм, который из прогрессивного в свое время превратился в регрессивный хозяйственный уклад, потерявший возможность дальнейшего развития. Определенную и весьма существенную роль сыграло также мусульманское духовенство, разгромившее «еретиков» и проводившее в Средней Азии (да и вообще в исламских странах) политику своего рода контрреформации.

Немаловажную роль в этом сыграло еще одно обстоятельство. Географические открытия и освоение новых морских путей в конце XV—XVI вв. отразились на хозяйственной жизни Средней Азии. Она мало-помалу сходит со сцены как основной узел караванных путей, связывавших Запад с Востоком. Падение удельного веса торговли вызвало, в свою очередь, снижение роли ремесла, работавшего на экспорт. Средняя Азия в определенной степени начала возвращаться к натуральному хозяйству, и важнейший культурный центр Востока к XVIII в. начал терять свое прежнее значение. Впрочем, как центр религиозного просвещения Бухара еще долго продолжала сохранять свое влияние.

Однако едва ли будет справедливым говорить о полном отсутствии математической культуры в Средней Азии XVI—XVIII вв. Для поддержания в рабочем состоянии весьма сложной оросительной системы, для проведения новых каналов и для перераспределения земель, годных для сельскохозяйственной обработки, требовались и математические и астрономические знания. Их получали путем изучения трудов и учебных трактатов древних ученых. Доказательством этому служат рукописи сочинений классиков, переписанные в XVI и XVII вв. Известно также, что архитекторы Бухары продолжали самаркандскую традицию, требовавшую для выполнения идеи зодчего значительных математических познаний.

Что же представляла собой школьная математика в Средней Азии в XVI—XVIII вв.? Насколько можно судить по имеющимся данным, в тех медресе, где математика вообще преподавалась, она составляла более или менее подробный курс арифметики с некоторыми начатками геометрии. Сохранилась рукопись¹⁸ учебника на персидском языке, найденная в 1947 г. научной краеведческой экспедицией Кара-Калпакской АССР. Она датирована 1806 г., и, следовательно, по ней в некоторой степени можно судить об уровне преподавания математики в медресе во второй половине XVIII в. Это краткий учебник арифметики с приложением некоторых геометрических сведений. Начинается он определением арифметических действий, автор насчитывает их шесть — удвоение, раздвоение, сложение, умножение, деление, извлечение квадратного корня.

¹⁸ А. А. Х а л и л о в. Математическое наследие среднеазиатских народов. — В кн.: Труды Туркменского пединститута. Вып. 6. № 5. Чарджоу, 1959.

Сначала изучали удвоение: записывали в столбец единицы и числа, кратные 2, до определенного предела, затем — раздвоение. Записывали это следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2 \\
 4 \\
 8 \\
 16 \\
 \dots \\
 1024 \\
 \hline
 1024 \\
 512 \\
 \dots \\
 2 \\
 1
 \end{array}$$

После раздвоения проходили сложение, а затем — умножение. Таблица умножения начиналась с 3×3 и кончалась на 8×9 (умножение 9×9 проходили позднее). Она имела следующий вид:

$$\begin{array}{r}
 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \\
 \hline
 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \\
 \hline
 27 \quad 24 \quad 21 \quad 18 \quad 15 \quad 12 \quad 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \\
 \hline
 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \\
 \hline
 36 \quad 32 \quad 28 \quad 24 \quad 20 \quad 16
 \end{array}$$

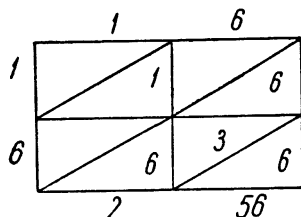
.....

$$\begin{array}{r}
 9 \quad 8 \\
 \hline
 8 \quad 8 \\
 \hline
 72 \quad 64
 \end{array}$$

Действие умножения включало также возведение в степень. Способ умножения отличался от принятого в настоящее время. Так, для того чтобы умножить два числа, их записывали около левой и верхней сторон прямоугольника, который делили горизонтальными и вертикальными чертами на несколько меньших прямоугольников, в зависимости от числа разрядов. Полученные меньшие прямоугольники делили пополам диагоналями. Результат умножения записывали внутри прямоугольника, например:



При умножении 16 на 16 действие принимало следующую форму:



$$\begin{aligned} 10 \times 10 &= 1 \quad (\text{сотня}) \\ 6 \times 10 &= 6 \quad (\text{десятков}) \\ 6 \times 10 &= 6 \quad (\text{десятков}) \\ 6 \times 6 &= 36 \end{aligned}$$

Имел свои особенности и алгоритм деления. Знаки действий автор рукописи не применяет.

Существовало два способа извлечения квадратного корня. Для проверки правильности действия рекомендовалось умножить полученное число само на себя, а затем прибавить остаток. Сравним первый способ с современной формой записи:

в записи рукописи

0	
1	0
	1
3	
3	

в современной записи

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &= 3 \\ 3 \cdot 3 &= 9; \quad 9 + 1 = 10 \end{aligned}$$

6			
.			
4			
4	0	9	6
	4		
1	2	4	

$$\begin{aligned} \sqrt{40'96} &= 64 \\ 36 \\ 124 \overline{) 496} \\ 4 \overline{) 496} \end{aligned}$$

Пример извлечения квадратного корня из 65536 по второму способу:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 45 \\ 65536 \quad \frac{2}{4} \quad 10 \\ 0 \ 0 \ 0 \quad \overline{55} [\sqrt{65536} = 256] \\ \underline{2 \ 56} \\ 24536 \\ \underline{10} \\ 55 \end{array}$$

После изучения извлечения квадратного корня переходили к определению площадей треугольников по формуле Герона. Разумеется, и эта формула давалась в чисто рецептурном виде. Затем решали еще несколько занимательных задач. Этим и исчерпывается все содержание рукописи.

Однако в рассмотренной рукописи представлены не все математические знания, сообщавшиеся в медресе. Известно, например, что в медресе изучался трактат «Фараиз», содержащий решение различных задач на раздел наследства. Есть сведения, что автором трактата был ал-Хорезми. Насколько можно судить по конспекту, обучение носило рецептурный характер и не включало никаких методов для развития самостоятельного мышления учащихся.

□

Математика у народов Средней Азии имеет длинную и яркую историю. Прямые источники, по которым можно было бы судить о развитии математики в доарабское время, до нас не дошли, однако косвенные источники указывают на существование довольно древней математической традиции, развивавшейся во взаимовлиянии с культурами Востока, Египта, Месопотамии, Индии и Китая, а также с эллинистической культурой Средиземноморья.

Начиная с VIII в. математика становится одной из наиболее важных наук в арабоязычных странах. В ее развитии наиболее значительную роль сыграли среднеазиатские и, несколько позже, азербайджанские ученые. Однако развитие математики и математических знаний в Средней Азии не представляет собой один непрерывный процесс. Географическое положение этих стран, благоприятное для торгово-культурного обмена между Востоком и Западом, в то же время было причиной нападения бесчисленных кочевых орд, двигавшихся с северо-востока на юго-запад. Во время непрерывных войн с кочевниками, а также междоусобных войн местных феодалов неоднократно уничтожались огромные культурные ценности и народам приходилось заново строить свою жизнь и создавать свою культуру. Достоинно удивления, что, несмотря на тяжелые испытания, среднеазиатские народы дали таких выдающихся мыслителей, как ал-Хорезми, ал-Бируни, Омар Хайям, Улугбек и многие другие. Однако условия феодализма с XVI в. оказались губительными для дальнейшего развития математики и естественных наук. И вплоть до XIX в. преподаватели медресе и отдельные любители наук в лучшем случае занимались переписыванием древних трактатов. Преподавание математики в Средней Азии до XVII в. находилось примерно на уровне преподавания в школах других стран. Однако отсутствие самостоятельной научной работы в области математики на протяжении более чем трех столетий привело и преподавание ее к деградации: уровень преподавания в конце XVIII в. был уже не сравним с уровнем преподавания в России и странах Запада в этот период и, по видимому, даже ниже, чем в XVII в.

- Харкевич Е. Хроніка Львівської академічної гімназії. Звіт дирекції гімназії за 1900—1901 рік. Львів, 1901.
- Чечулин Н. Д. Воспитание и домашнее обучение в России в XVIII в.— В кн.: Дела и дни. Кн. 1, 1920.
- Шперк В. Ф. Военно-инженерное образование в России в XVIII в.— В кн.: Вестник Военно-инженерной академии РККА им. В. В. Куйбышева. М., 1939.
- Юшкевич А. П. Математика в Московском университете за первые сто лет его существования.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М.—Л., 1948.
- Bednarski S. Dzieje kulturalne jezuickiego kollegium we Lwowie. T. 33. Lwów, 1936.
- Finkel-Starzyński. Historia uniwersytetu lwowskiego. Lwów, 1894.
- Sadok-Baracz. Pamiętki buczackie. Lwów, 1882.
- Swistun F. Kronika gimnazjum rzeszowskiego.— Sprawozdanie dyrekcyi gimnazjum za rok 1885—1886. Rzeszów, 1886.
- Tomaszewski S. Pogląd na rozwój gimnazjum brzezańskiego (1789—1905). Cz. 1. Sprawozdanie dyrekcyi gimnazjum za rok 1905—1906, 1906.
- Zagórski W. O szkole grecko-prawosławnej we Lwowie.— Museum, Lwów, 1893.
- Zaleski S. Jezuiti w Polsce. T. 3. Cz. 2. Lwów, 1900.

К главе XI

- Абу Рейхан ал-Бируни. Избранные произведения. Т. 1. Памятники минувших поколений. Перев. М. А. Салье. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1957.
- Абу Рейхан ал-Бируни. Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него. Перев. С. А. Красновой.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. 3. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- Ахадова М. Работа математиков Средней Азии по теории параллельных линий.— В кн.: Труды III Всесоюзного математического съезда. Т. 4. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Бартольд В. В. История культурной жизни Туркестана. Изд-во АН СССР, Л., 1927.
- Беленицкий А. М. Картина мира по Бируни.— В кн.: Ученые записки Ленинградского университета. Серия востоковедческих наук. Вып. 1. № 8. Л., 1949.
- Бируни И. Сборник статей под ред. С. П. Толстова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.
- Бируни — великий узбекский ученый средневековья. Сборник статей под ред. В. Ю. Захидова, А. А. Семенова, Я. Г. Гуляшова. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1950.
- Бретаницкий Л. С. и Розенфельд Б. А. Архитектурная глава трактата «Ключ арифметики» Гияс ад-Дина Каши.— В кн.: Искусство Азербайджана. Вып. 5. Изд-во АН АзССР, Баку, 1956.
- Выгодский М. Я. Происхождение «правил двух ложных положений».— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Гафуров Б. Г. История таджикского народа. В кратком изложении. Т. 1. Гос. политиздат, М., 1949.
- Джालалов Г. Д. Бируни и астрономическая наука.— В кн.: Бируни. Изд-во АН СССР, Ташкент, 1950.
- Джалайлов Г. Д. Бируни и картография.— Известия АН УзССР, 1950, № 1.
- Джалайлов Г. Д. Гияс ад-Дин Джамшид Чустӣ (Каши) — крупнейший астроном и математик XV века.— В кн.: Ученые записки Ташкентского пединститута. Физико-математическая серия. Вып. 7, 1957.
- Джалайлов Г. Д. К вопросу о составлении планетных таблиц самаркандской обсерватории.— В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М., 1955.
- Джалайлов Г. Д. Отличие «Зидж Гурагани» от других подобных зиджей.— В кн.: Историко-астрономические исследования. Вып. 1. Физматгиз, М., 1955.
- Джалайлов Г. Д. Секстант как главный инструмент обсерватории Улугбека.— Астрономический журнал, 1947, вып. 4.

- Джемшид Гиясэддин ал-Каши. Ключ к арифметике. Трактат об округности. Перев. Б. А. Розенфельда, ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, коммент. А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда. Гостехиздат, М., 1956.; Историко-математические исследования. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954.
- История Узбекской ССР. Изд. 2-е, испр. Т. 1. Кн. 1. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1955.
- Каган В. Ф. Основания геометрии. Ч. 1. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
- Казизаде ар-Руми. Трактат об определении синуса одного градуса. Перев. Б. А. Розенфельда, коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Карпова Л. А. и Краснова С. А. О математическом трактате ал-Бируни «Об определении хорды в круге при помощи свойств ломаной линии, вписанной в него». — В кн.: Тезисы докладов и сообщений на Межвузовской конференции по истории физико-математических наук. 25 мая — 2 июня 1960 г. Изд-во Московского университета, М., 1960.
- Кары-Ниязов Т. Н. Астрономическая школа Улугбека. Изд-во АН СССР, М., 1950.
- Кары-Ниязов Т. Н. Великий ученый и мыслитель.— В кн.: Материалы научной сессии АН УзССР, посв. 1000-летию юбилею Ибн Сины. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1953.
- Кары-Ниязов Т. Н. Обсерватория Улугбека в свете новых данных.— В кн.: Материалы научной сессии АН УзССР. Ташкент, 1947.
- Кары-Ниязов Т. Н. О культурном наследии узбекского народа. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1960.
- Кары-Ниязов Т. Н. О некоторых результатах, полученных обсерваторией Улугбека. Доклад на XXV Международном конгрессе востоковедов. Изд-во восточной литературы, М., 1960.
- Кары-Ниязов Т. Н. Улугбек — великий узбекский астроном XV века.— Природа, 1952, № 10.
- Леонов Н. И. Научный подвиг самаркандских астрономов XV в. Физматгиз, М., 1958.
- Леонов Н. И. Улугбек — великий астроном XV в. (1394—1449). Гостехиздат, М., 1960.
- Малыгин К. А. Развитие математики в Средней Азии в IX—XV вв. — Математика в школе, 1955, № 3.
- Мамедбейли Г. Д., Гашизмаде М. У. О значении в истории математики произведения «Шакулд Гита». — Известия АН АзССР, 1951, № 8.
- Массон М. Е. Обсерватория Улугбека. Изд-во АН СССР. Уз. филиал, Ташкент, 1941.
- Медовой М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Морочник С. Б. и Розенфельд Б. А. Омар Хайям — поэт, мыслитель, ученый. Таджикгосиздат. Сталинабад, 1957.
- Мухамедов Х. Абу-Али ибн-Сина — математик.— В кн.: Тезисы докладов и сообщений на Межвузовской конференции по истории физико-математических наук. 25 мая — 2 июня 1960 г. Изд-во Московского университета, М., 1960.
- Омар Хайям. Математические трактаты. Перев. Б. А. Розенфельда, прим. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953.
- Розенфельд Б. А. Доказательства пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана Ибн ал-Хайсама и Льва Герсониды.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958.
- Розенфельд Б. А. О математических работах Омара Хайяма.— Успехи математических наук, 1953, т. 8, вып. 3 (55).
- Розенфельд Б. А. Новые исследования по предыстории неевклидовой геометрии.— В кн.: В. Ф. Каган. Основания геометрии. Ч. 2. ГИТТЛ, М., 1956.
- Розенфельд Б. А. О математических работах Джемшида Гиясэддина Каши.— В кн.: Ученые записки Азербайджанского университета. № 5, 1957.

- Розенфельд Б. А. О математических работах Омара Хайяма.— В кн.: Ученые записки Азербайджанского университета. № 9, 1957.
- Розенфельд Б. А. Попытка квадратичного интерполирования у Абу-р-Рейхана ал-Бируни.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века.— Советское востоковедение, 1958, № 3, 6.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. О трактате Казизаде ар-Руми об определении синуса одного градуса.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. Предыстория неевклидовой геометрии на средневековом Востоке. Доклад на XXV Международном конгрессе востоковедов. Изд-во восточной литературы, М., 1960.
- Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961.
- Розенфельд Б. А., Краснова С. А. и Рожанская М. М. О математических работах Абу-р-Райхана ал-Бируни.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. 3. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- Садыков Х. У. Астрономическое учение Бируни.— В кн.: Бируни. Изд-во АН СССР, М., 1950.
- Садыков Х. У. Бируни и его работы по астрономии и математической географии. Гостехиздат, М., 1953.
- Салье М. А. Мухаммед ал-Хорезми — великий узбекский ученый. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1954.
- Салье М. А. Об освещении так называемой «арабской культуры» в Средней Азии.— В кн.: Труды Института востоковедения АН УзССР. Вып. 3. Ташкент, 1954.
- Толстов С. П. По следам древнехорезмийской цивилизации. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.
- Халилов А. А. Математическое наследие среднеазиатских ученых.— В кн.: Труды Туркменского пединститута. Вып. 6. № 5, 1959.
- Хатипов А. Э. О первой книге геометрического трактата Омара Хайяма.— В кн.: Труды Самаркандского университета. Новая серия. № 107. Самарканд, 1960.
- Хатипов А. Э.-А. Теория параллельных Омара Хайяма.— В кн.: Труды Узбекского университета. Вып. 78. Самарканд, 1958.
- Шамс ад-Дин ас-Самарканди. Основные предложения (отрывок). Перев. Б. А. Розенфельда, коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961.
- Шикин В. А. Обсерватория Улугбека и ее исследования.— В кн.: Труды Института истории и археологии АН УзССР. Т. 5, 1953.
- Щеглов В. П. К вопросу о географических координатах и азимуте секстанта обсерватории Улугбека в Самарканде.— Астрономический журнал, 1953, т. 30, вып. 2.
- Юсупов Н. Из истории математики народов Ближнего и Среднего Востока.— В кн.: Труды II Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Изд-во АН СССР, Л., 1936.
- Юсупов Н. Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке. Татиздат, Казань, 1932.
- Юшкевич А. П. Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми.— В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. Т. 1. М., 1954.
- Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV веках.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951.
- Юшкевич А. П. Омар Хайям и его алгебра.— В кн.: Труды Института истории естествознания АН СССР. Т. 2. М., 1948.
- Юшкевич А. П. О новых работах в СССР по истории математики.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958.

- Юшкевич А. П. и Розенфельд Б. А. Математика в странах Востока в средние века.— В кн.: Из истории науки и техники в странах Востока. Вып. 1. Изд-во АН СССР, М., 1960.
- Avicenne. Le livre de science. II (physique, mathématique). Paris, 1958.
- Bielawski J. Książka w świecie islamu. «Ossolineum», Wrocław, 1961.
- Brockelman C. Geschichte der arabischen Literatur. Bd 1—5. Weimar, Berlin — Leiden, 1898—1942.
- Carra de Vaux. L'Almageste d'Aboul Wefa Albūzjdani.— Journal asiatique. S. 8. T. 19, 1892.
- Gandz S. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra.— Osiris. V. 3, 1937.
- Gandz S. The sources of al-Khowārismi algebra.— Osiris. V. 1, 1936.
- Encyklopädie des Islams. Bd 1—4. Leyden — Leipzig, 1913—1936.
- Karpiński L. Ch. Robert of Chester's latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi. New York, 1915.
- Kennedy E. S. The Planetary equatorium of Jamshid Ghi Yath ad-Din al-Kashi. Princeton, 1960.
- Landau R. Arab contribution to civilisation. San Francisco, 1958.
- Luckey P. Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Camisid b. Mas'ūd al-Kāṣī, Berlin, 1953.
- Luckey P. Die Rechenkunst bei Čamšīd b. Mas'ūd al-Kāṣī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Wiesbaden, 1950.
- Mieli A. La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondial. Leiden, 1939.
- Mohammed ben Musa. The algebra, edited and translated by F. Rosen. London, 1831.
- O'Leary D. L. How Greek science passed to arabs. London, 1948.
- Omar Alkhayyam. L'algebre, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits par F. Woepcke. Paris, 1851.
- Omar Khayyam. The algebra, translated by D. S. Kasin. New York, 1931.
- Plooiij E. B. Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by arabian commentators. Rotterdam, 1950.
- Riesler J. C. La civilisation arabe. Paris, 1955.
- Rosen J. Ein wissenschaftlicher Aufsatz Umar-i-Khayyams.— Zeitschrift d. Deutsch. Morgenländ. Gesellsch. Bd 4 (79), 1925.
- Ruska J. Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst.— Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, 1917.
- Schoy C. Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l Reihān Muhammed ibn Ahmad al-Biruni, dargestellt nach al-Qānun al Mas'ūdi. Hannover, 1927.
- Smith D. E. Euclid, Omar Khayyam and Saccheri.— Scripta mathematica. T. 3. N 1, 1935.
- Suter H. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l Reihan Muh el'Biruni.— Bibl. math. Bd 11, 1911.
- Suter H. Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l-Wefa. Erlangen, 1922.
- Suter H. Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Übergang vom Orient und den Okzident. Aarau, 1897.
- Suter H. Die Mathematiker und Astronomer der Araber und ihre Werke. Leipzig, 1900—1902.
- Wieleitner H. Die Erteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Atchwarāzmi.— Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht. Bd 53, 1922.
- Woepcke F. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafā.— Journal asiatique. V. 5, 1855.
- Wūnstenfeld F. Die Akademien der Araber und ihre Lehrer. Göttingen, 1837.

ГЛАВА VIII. ТРУДЫ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, ГЕОМЕТРИИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

1. Теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (<i>Н. И. Симонов</i>)	257
2. Теория уравнений математической физики (<i>Н. И. Симонов</i>)	266
3. Вариационное исчисление (<i>Н. И. Симонов</i>)	272
4. Геометрия (<i>В. В. Котек</i>)	277
5. Теория вероятностей (<i>Л. Е. Майстров</i>)	285
6. Теория чисел (<i>В. В. Котек</i>)	287

ГЛАВА IX. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ И ТЕХНИКА В ТРУДАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА. МИРОВОЗЗРЕНИЕ ЭЙЛЕРА

1. Астрономия и механика твердого тела (<i>В. В. Котек</i>)	292
2. Гидродинамика, гидравлика и акустика (<i>В. В. Котек</i>)	299
3. Сопротивление материалов (<i>В. В. Котек</i>)	303
4. Теория корабля (<i>В. В. Котек</i>)	305
5. Баллистика (<i>В. В. Котек</i>)	307
6. Картография (<i>В. В. Котек</i>)	309
7. Оптика, теплота, электричество и магнетизм (<i>В. В. Котек</i>)	310
8. Теория турбин (<i>В. В. Котек</i>)	315
9. Механика машин (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	317
10. Мировоззрение Эйлера (<i>В. В. Котек</i>)	320

ГЛАВА X. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В РОССИИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XVIII в.

1. Краткая характеристика социально-экономического и культурного развития России (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	326
2. М. В. Ломоносов (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	329
3. Труды русских математиков в последней четверти XVIII в. (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	341
4. Организация системы общего образования в России. Математика в Московском университете (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	355
5. Математика в русских военных и инженерных школах (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	361
6. Развитие математических знаний на Украине и в Белоруссии от 40-х годов до конца XVIII в. (<i>А. Н. Боголюбов и О. Н. Сичкаръ, Н. А. Чайковский</i>)	370
7. Математические знания в Прибалтике до XIX в. (<i>И. Б. Погребысский</i>)	380

ГЛАВА XI. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В СРЕДНЕЙ АЗИИ

1. Истоки науки и культуры Средней Азии (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	388
2. Арабское завоевание. Ал-Хорезми (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	390
3. Развитие математики в Средней Азии в IX—XI вв. (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	394
4. Средняя Азия в XII в. Математическое творчество Омара Хайяма (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	402
5. Монгольское завоевание Средней Азии и его последствия. Улугбек и его школа (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	407
6. Культурное развитие Средней Азии в XVI—XVIII вв. Уровень математических знаний (<i>А. Н. Боголюбов</i>)	415